Zadatak 241 (Jure, ekonomska škola)

U jednadžbi $x^2 + b \cdot x + 8 = 0$ jedno rješenje je za 2 veće od drugoga. Odredite b.

$$A. -6\ ,\ 6 \qquad B. 4\ ,\ 6 \qquad C. -6\ ,\ 4 \qquad D. -4\ ,\ 4$$

Rješenje 241

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b = a + n \quad , \quad b - n = a \quad , \quad b - a = n.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Najprije izračunamo x_1 i x_2.

$$x^2 + b \cdot x + 8 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + b \cdot x + 8 = 0 \\ a = 1\ ,\ b = b\ ,\ c = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{8}{1} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 8 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{uvjet} \\ x_2 = x_1 + 2 \end{matrix} \right] \Rightarrow x_1 \cdot (x_1 + 2) = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + 2 \cdot x_1 = 8 \Rightarrow x_1^2 + 2 \cdot x_1 - 8 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_1 - 8 = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{matrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1^2 - 2 \cdot x_1\right) + \left(4 \cdot x_1 - 8\right) = 0 \Rightarrow x_1 \cdot (x_1 - 2) + 4 \cdot (x_1 - 2) = 0 \Rightarrow (x_1 - 2) \cdot (x_1 + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 - 2 = 0 \\ x_1 + 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} (x_1)_1 = 2 \\ (x_1)_2 = 4 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo $(x_2)_1$ i $(x_2)_2$:

- $$\left.\begin{matrix} (x_1)_1 = 2 \\ (x_2)_1 = (x_1)_1 + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_2)_1 = 2 + 2 \Rightarrow (x_2)_1 = 4$$
- $$\left.\begin{matrix} (x_1)_2 = -4 \\ (x_2)_2 = (x_1)_2 + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_2)_2 = -4 + 2 \Rightarrow (x_2)_2 = -2.$$

Postoje dva rješenja za b.

Računamo b_1.

$$(x_1)_1 + (x_2)_1 = -\frac{b_1}{a} \Rightarrow 2 + 4 = -\frac{b_1}{1} \Rightarrow 6 = -b_1 \Rightarrow b_1 = -6.$$

Računamo b_2.

www.halapa.com

$$(x_1)_2 + (x_2)_2 = -\frac{b_2}{a} \Rightarrow -4-2 = -\frac{b_2}{1} \Rightarrow -6 = -b_2 \Rightarrow b_2 = 6.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 241

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 242 (Zoran, srednja škola)

Odredite sva rješenja jednadžbe $2 \cdot x^2 = 15 \cdot x.$

Rješenje 242

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$2 \cdot x^2 = 15 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 15 \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot (2 \cdot x - 15) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 2 \cdot x - 15 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 2 \cdot x = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 2 \cdot x = 15 \; / : 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{15}{2} \end{array}\right\}.$$

www.halapa.com

Vježba 242

Odredite sva rješenja jednadžbe $2 \cdot x^2 = 5 \cdot x.$

Rezultat: $0, \frac{5}{2}.$

Zadatak 243 (Harry Potter, gimnazija)

Korijeni x_1 i x_2 polinoma $f(x) = x^2 + p \cdot x + 12$ su pozitivni i zadovoljavaju uvjet $x_1 - x_2 = 1.$ Koeficijent p iznosi:

$$A. -7 \qquad B. 6 \qquad C. 2 \qquad D. 7$$

Rješenje 243

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_\circ) = 0.$$

Najprije odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$x^2+p\cdot x+12=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+p\cdot x+12=0 \\ a=1\ ,\ b=p\ ,\ c=12 \end{matrix}\right\}.$$

Sada je

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{p}{1} \Rightarrow x_1+x_2=-p.$$

Riješimo sustav.

$$\left.\begin{matrix} x_1+x_2=-p \\ x_1-x_2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{matrix}\right] \Rightarrow 2\cdot x_1=1-p \Rightarrow 2\cdot x_1=1-p\ /\cdot\frac{1}{p} \Rightarrow x_1=\frac{1-p}{2}.$$

Računamo x_2.

$$\left.\begin{matrix} x_1=\frac{1-p}{2} \\ x_1+x_2=-p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1-p}{2}+x_2=-p \Rightarrow x_2=-p-\frac{1-p}{2} \Rightarrow x_2=-\frac{p}{1}-\frac{1-p}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{-2\cdot p-(1-p)}{2} \Rightarrow x_2=\frac{-2\cdot p-1+p}{2} \Rightarrow x_2=\frac{-p-1}{2}.$$

Koeficijent p iznosi:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{12}{1} \Rightarrow x_1\cdot x_2=12 \Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1=\frac{1-p}{2} \\ x_2=\frac{-p-1}{2} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{1-p}{2}\cdot\frac{-p-1}{2}=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1-p)\cdot(-p-1)}{4}=12 \Rightarrow \frac{(p-1)\cdot(p+1)}{4}=12 \Rightarrow \frac{p^2-1}{4}=12 \Rightarrow \frac{p^2-1}{4}=12\ /\cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2-1=48 \Rightarrow p^2=48+1 \Rightarrow p^2=49 \Rightarrow p^2=49\ /\sqrt{\ } \Rightarrow p=\pm\sqrt{49} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} p_1=7 \\ p_2=-7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p=-7 \text{ jer su po pretpostavci korijeni pozitivni.}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 243

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 244 (Harry Potter, gimnazija)

Ako za korijene x_1 i x_2 jednadžbe $x^2-2\cdot m\cdot x+2=0$ vrijedi $(4\cdot x_1-1)\cdot(4\cdot x_2-1)=1$, onda je m jednak:

$A.\ 4 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ -2 \qquad D.\ 3$

Rješenje 244

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

www.halapa.com

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Najprije odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$x^2-2\cdot m\cdot x+2=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-2\cdot m\cdot x+2=0 \\ a=1\ ,\ b=-2\cdot m\ ,\ c=2 \end{array}\right\}.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{-2\cdot m}{1} \\ x_1\cdot x_2=\frac{2}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=2\cdot m \\ x_1\cdot x_2=2 \end{array}\right\}.$$

Iz uvjeta dobije se m:

$$(4\cdot x_1-1)\cdot(4\cdot x_2-1)=1 \Rightarrow 16\cdot x_1\cdot x_2-4\cdot x_1-4\cdot x_2+1=1 \Rightarrow 16\cdot x_1\cdot x_2-4\cdot x_1-4\cdot x_2+1=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot x_1\cdot x_2-4\cdot x_1-4\cdot x_2=0 \Rightarrow 16\cdot x_1\cdot x_2-4\cdot x_1-4\cdot x_2=0\ /:4 \Rightarrow 4\cdot x_1\cdot x_2-x_1-x_2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1\cdot x_2=2 \\ x_1+x_2=2\cdot m \end{array}\right] \Rightarrow 4\cdot 2-2\cdot m=0 \Rightarrow 8-2\cdot m=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot m=-8 \Rightarrow -2\cdot m=-8\ /:(-2) \Rightarrow m=4.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 244

Odmor!

Rezultat: …

www.halapa.com

Zadatak 245 (Harry Potter, gimnazija)

Brojevi p i q, različiti od nule, korijeni su kvadratne jednadžbe $x^2+p\cdot x+q=0$, ako je:

A. $p=1,\ q=2$ *B.* $p=-1,\ q=1$ *C.* $p=1,\ q=-2$ *D.* $p=-1,\ q=2$

Rješenje 245

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Najprije odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$x^2+p\cdot x+q=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+p\cdot x+q=0 \\ a=1\ ,\ b=p\ ,\ c=q \end{array}\right\}.$$

Budući da su p i q korijeni kvadratne jednadžbe, slijedi:

$$p\cdot q=\frac{c}{a} \Rightarrow p\cdot q=\frac{q}{1} \Rightarrow p\cdot q=q \Rightarrow [\,q\neq 0\,] \Rightarrow p\cdot q=q\ /:q \Rightarrow p=1.$$

Sada je

$$p+q=-\frac{b}{a} \Rightarrow p+q=-\frac{p}{1} \Rightarrow p+q=-p.$$

Računamo q.

$$\left.\begin{array}{l} p=1 \\ p+q=-p \end{array}\right\} \Rightarrow 1+q=-1 \Rightarrow q=-1-1 \Rightarrow q=-2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 245

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 246 (Harry Potter, gimnazija)

Ako korijeni x_1 i x_2 jednadžbe $x^2-2\cdot x+m=0$ zadovoljavaju uvjet $3\cdot x_2-5\cdot x_1=30$, onda je vrijednost parametra m jednaka:

$A. -15 \qquad B. -13 \qquad C. -12 \qquad D. 10$

Rješenje 246

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Najprije odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$x^2-2\cdot x+m=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-2\cdot x+m=0 \\ a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=m \end{array}\right\}.$$

Sada je

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{-2}{1} \Rightarrow x_1+x_2=2.$$

Riješimo sustav.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=2 \\ 3\cdot x_2-5\cdot x_1=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=2 \\ -5\cdot x_1+3\cdot x_2=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=2\ /\cdot 5 \\ -5\cdot x_1+3\cdot x_2=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot x_1+5\cdot x_2=10 \\ -5\cdot x_1+3\cdot x_2=30 \end{array}\right\} \Rightarrow 8\cdot x_2=40 \Rightarrow 8\cdot x_2=40\ /:8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2=5.$$

Računamo x_1.

$$\left.\begin{array}{l} x_2=5 \\ x_1+x_2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1+5=2 \Rightarrow x_1=2-5 \Rightarrow x_1=-3.$$

Vrijednost parametra m iznosi:

$$x_1\cdot x_2=m \Rightarrow m=x_1\cdot x_2 \Rightarrow m=-3\cdot 5 \Rightarrow m=-15.$$

www.halapa.com

Odgovor je pod A.

Vježba 246

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 247 (Marija, gimnazija)

Korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 + p \cdot x + q = 0$ jesu x_1 i x_2. Kvadratna jednadžba kojoj su korijeni $2 \cdot x_1$ i $2 \cdot x_2$ glasi:

$$A.\ x^2 + 2 \cdot p \cdot x + 2 \cdot q = 0 \qquad B.\ x^2 + 4 \cdot p \cdot x + 4 \cdot q = 0$$

$$C.\ x^2 + 2 \cdot p \cdot x + 4 \cdot q = 0 \qquad D.\ x^2 + 4 \cdot p \cdot x + 2 \cdot q = 0$$

Rješenje 247

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

gdje je $a \neq 0$ po volji određen broj.
Najprije odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + p \cdot x + q = 0 \\ a = 1 \ , \ b = p \ , \ c = q \end{array}\right\}.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{p}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{q}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{array}\right\}.$$

Kvadratna jednadžba kojoj su korijeni $2 \cdot x_1$ i $2 \cdot x_2$ glasi (stavimo a = 1):

$$(x - 2 \cdot x_1) \cdot (x - 2 \cdot x_2) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x_2 \cdot x - 2 \cdot x_1 \cdot x + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot (x_1 + x_2) \cdot x + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot (-p) \cdot x + 4 \cdot q = 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot p \cdot x + 4 \cdot q = 0.$$

www.halapa.com

Odgovor je pod C.

Vježba 247

Korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 + p \cdot x + q = 0$ jesu x_1 i x_2. Kvadratna jednadžba kojoj su korijeni $3 \cdot x_1$ i $3 \cdot x_2$ glasi:

$$A.\ x^2 + 3 \cdot p \cdot x + 3 \cdot q = 0 \qquad B.\ x^2 + 6 \cdot p \cdot x + 6 \cdot q = 0$$
$$C.\ x^2 + 3 \cdot p \cdot x + 9 \cdot q = 0 \qquad D.\ x^2 + 9 \cdot p \cdot x + 3 \cdot q = 0$$

Rezultat: C.

Zadatak 248 (Leon, gimnazija)

Zadana je kvadratna jednadžba $x^2 - x + m = 0.$ Razlika korijena ove jednadžbe jest imaginaran broj za svaki m za koji je:

$$A.\ m < -3 \qquad B.\ m > -3 \qquad C.\ m > 0 \qquad D.\ m > \frac{1}{4}$$

Rješenje 248

Ponovimo!

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \quad , \quad a < b \ , \ c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x \in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y \in B.$

Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je $x \geq 0$ ili $x \in [0, +\infty \rangle.$

Imaginarni brojevi imaju oblik b · i gdje je b realni broj koji nije jednak nuli, a i je imaginarna jedinica za koju vrijedi:

$$i^2 = -1.$$

Riješimo kvadratnu jednadžbu.

$$x^2 - x + m = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} x^2 - x + m = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = m \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = m \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} \end{matrix} \right\}.$$

Razlika korijena iznosi:

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot m} - \left(1 - \sqrt{1 - 4 \cdot m}\right)}{2} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot m} - 1 + \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot m} - 1 + \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{1 - 4 \cdot m}}{2} \Rightarrow x_1 - x_2 = \sqrt{1 - 4 \cdot m}.$$

Imaginarni broj dobije se za

$$1 - 4 \cdot m < 0 \Rightarrow -4 \cdot m < -1 \Rightarrow -4 \cdot m < -1 \; / : (-4) \Rightarrow m > \frac{1}{4}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 248

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 249 (Lupus, gimnazija)

Jednadžba $a \cdot x^2 - x + \frac{\log a}{a} = 0$, gdje je a > 0, ima realne korijene ako je

$A.\ a \le \sqrt[4]{10}$ $\quad B.\ a = 10$ $\quad C.\ a > \sqrt[4]{10}$ $\quad D.\ a \ge \sqrt{10}$

Rješenje 249

Ponovimo!

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad , \quad a \ge b \ , \ c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log f(x) \le \log g(x) \Rightarrow f(x) \le g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$a\cdot x^2-x+\frac{\log a}{a}=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-x+\frac{\log a}{a}=0 \\ a=a\ ,\ b=-1\ ,\ c=\frac{\log a}{a} \end{array}\right\}.$$

Jednadžba ima realne korijene, ako je diskriminanta nenegativna (pozitivna ili jednaka nuli).

$$b^2-4\cdot a\cdot c\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=a \\ b=-1 \\ c=\frac{\log a}{a} \end{array}\right] \Rightarrow (-1)^2-4\cdot a\cdot\frac{\log a}{a}\geq 0 \Rightarrow 1-4\cdot a\cdot\frac{\log a}{a}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-4\cdot a\cdot\frac{\log a}{a}\geq 0 \Rightarrow 1-4\cdot\log a\geq 0 \Rightarrow -4\cdot\log a\geq -1 \Rightarrow -4\cdot\log a\geq -1\ /:(-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log a\leq\frac{1}{4} \Rightarrow a\leq 10^{\frac{1}{4}} \Rightarrow a\leq\sqrt[4]{10}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 249

Jednadžba $a\cdot x^2+x+\frac{\log a}{a}=0$, gdje je a > 0, ima realne korijene ako je

$A.\ a\leq\sqrt[4]{10}$ $B.\ a=10$ $C.\ a>\sqrt[4]{10}$ $D.\ a\geq\sqrt{10}$

Rezultat: A.

www.halapa.com

Zadatak 250 (Lupus, gimnazija)

Koje vrijednosti poprima realni parametar m ako je vrijednost izraza $x^2+2\cdot x+m$ veća od 1 za svaki realni x?

$A.\ m>1$ $B.\ 2<m<4$ $C.\ m<4$ $D.\ m>2$

Rješenje 250

Ponovimo!

$$a<b\ ,\ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Preoblikujemo izraz.

$$x^2+2\cdot x+m>1 \Rightarrow x^2+2\cdot x+m-1>0.$$

Odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$x^2+2\cdot x+m-1=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+2\cdot x+m-1=0 \\ a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=m-1 \end{matrix}\right\}.$$

Budući da funkcija $f(x)=x^2+2\cdot x+m-1$ nema realnih nultočaka, diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2+2\cdot x+m-1=0$ mora biti negativna.

$$b^2-4\cdot a\cdot c<0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a=1 \\ b=2 \\ c=m-1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2^2-4\cdot 1\cdot(m-1)<0 \Rightarrow 4-4\cdot(m-1)<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-4\cdot m+4<0 \Rightarrow -4\cdot m<-4-4 \Rightarrow -4\cdot m<-8 \Rightarrow -4\cdot m<-8\ /:(-4) \Rightarrow m>2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 250

Koje vrijednosti poprima realni parametar m ako je vrijednost izraza $x^2+2\cdot x+m$ veća od 2 za svaki realni x?

$A.\ m>4$ $\quad B.\ 3<m<4$ $\quad C.\ m<3$ $\quad D.\ m>3$

Rezultat: D.

Zadatak 251 (Vesna, ekonomska škola)

Riješite jednadžbu $\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-2\right)^2=x^2-2.$

Rješenje 251

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

1.inačica

$$\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-2\right)^2=x^2-2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(x^2-2\right)^2=x^2-2\ /\cdot 2 \Rightarrow \left(x^2-2\right)^2=2\cdot\left(x^2-2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot 2+2^2=2\cdot x^2-4 \Rightarrow x^4-4\cdot x^2+4=2\cdot x^2-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-4\cdot x^2+4-2\cdot x^2+4=0 \Rightarrow x^4-6\cdot x^2+8=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{bikavdratna} \\ \text{jednadžba} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ x^2=t \end{bmatrix} \Rightarrow t^2-6\cdot t+8=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} t^2-6\cdot t+8=0 \\ a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=8 \\ t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{6\pm2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\frac{6+2}{2} \\ t_2=\frac{6-2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\frac{8}{2} \\ t_2=\frac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\frac{8}{2} \\ t_2=\frac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=4 \\ t_2=2 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni!

- $\left.\begin{array}{l} x^2=t \\ t=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x^2=4 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{array}\right\}$
- $\left.\begin{array}{l} x^2=t \\ t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x^2=2 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=\sqrt{2} \\ x_4=-\sqrt{2} \end{array}\right\}.$

2.inačica

$$\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-2\right)^2=x^2-2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ x^2-2=t \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot t^2=t \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot t^2=t \,/\cdot 2 \Rightarrow t^2=2\cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-2\cdot t=0 \Rightarrow t\cdot(t-2)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t=0 \\ t-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=0 \\ t_2=2 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni!

- $\left.\begin{array}{l} x^2-2=t \\ t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x^2=2 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\sqrt{2} \\ x_2=-\sqrt{2} \end{array}\right\}$
- $\left.\begin{array}{l} x^2-2=t \\ t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2=2 \Rightarrow x^2=2+2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x^2=4 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=2 \\ x_4=-2 \end{array}\right\}.$$

www.halapa.com

Vježba 251

Riješite jednadžbu $\left(x^2-2\right)^2-2\cdot x^2+4=0.$

Rezultat: $-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}\ ,\ -2\ ,\ 2.$

Zadatak 252 (Danijela, maturantica)

Riješite nejednadžbu $\frac{x^3-x+2\cdot x^2-2}{x+2}<0.$

$A.\ [-1,\ 0] \qquad B.\ \langle -1,\ 1\rangle \qquad C.\ \langle 0,\ 1\rangle \qquad D.\ \langle -1,\ 0\rangle$

Rješenje 252

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad , \quad |x| < a \ , \ a > 0 \Rightarrow x \in \langle -a, a \rangle.$$

$$\frac{x^3 - x + 2 \cdot x^2 - 2}{x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{x \cdot \left(x^2 - 1\right) + 2 \cdot \left(x^2 - 1\right)}{x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{\left(x^2 - 1\right) \cdot (x + 2)}{x + 2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ x \neq -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\left(x^2 - 1\right) \cdot (x + 2)}{x + 2} < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 252

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 253 (Vinko, srednja škola)

Riješite nejednadžbu $x \cdot |x| - 4 \cdot x < 0.$

www.halapa.com

Rješenje 253

Ponovimo!

$$a > b \ , \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad , \quad a \cdot b < 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} a < 0 \ , \ b > 0 \\ a > 0 \ , \ b < 0 \end{matrix} \right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$|x| < a \ , \ a > 0 \Rightarrow x \in \langle -a, a \rangle \quad , \quad |x| > a \ , \ a > 0 \Rightarrow x \in \langle -\infty, -a \rangle \cup \langle a, 0 \rangle.$$

Skup zadajemo nabrajanjem njegovih elemenata ili opisom karakterističnih svojstava koja posjeduju njegovi elementi.
Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A i sve elemente koji se nalaze u skupu B. Označavamo ga $A \cup B.$

Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga $A \cap B.$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu nejednadžbu.

$$x \cdot |x| - 4 \cdot x < 0 \Rightarrow x \cdot (|x| - 4) < 0.$$

Prvi slučaj

Pretpostavimo da je **x > 0**. Vrijedi:

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x.$$

Nejednadžba glasi:

$$x \cdot (|x| - 4) < 0 \Rightarrow x \cdot (x - 4) < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x - 4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in \langle 0, +\infty \rangle \\ x \in \langle -\infty, 4 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x \in \langle 0, 4 \rangle}.$$

Drugi slučaj

Pretpostavimo da je **x < 0**. Vrijedi:

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$$

Nejednadžba glasi:

$$x \cdot (|x| - 4) < 0 \Rightarrow x \cdot (-x - 4) < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ -x - 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ -x > 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ -x > 4 \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ x < -4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in \langle -\infty, 0 \rangle \\ x \in \langle -\infty, -4 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{array}\right] \Rightarrow \underline{x \in \langle -\infty, -4 \rangle}.$$

Konačno rješenje je unija rješenja prvog i drugog slučaja.

www.halapa.com

$$x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 0, 4 \rangle.$$

2.inačica

Prvi slučaj

Pretpostavimo da je **x > 0**. Tada vrijedi:

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x.$$

Nejednadžba glasi:

$$x \cdot |x| - 4 \cdot x < 0 \Rightarrow x \cdot x - 4 \cdot x < 0 \Rightarrow x \cdot (x - 4) < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x - 4 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x < 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in \langle 0, +\infty \rangle \\ x \in \langle -\infty, 4 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{array}\right] \Rightarrow \underline{x \in \langle 0, 4 \rangle}.$$

Drugi slučaj

Pretpostavimo da je **x < 0**. Tada vrijedi:

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$$

Nejednadžba glasi:

$$x \cdot |x| - 4 \cdot x < 0 \Rightarrow x \cdot (-x) - 4 \cdot x < 0 \Rightarrow x \cdot (-x - 4) < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ -x - 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ -x > 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ -x > 4 \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ x < -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in \langle -\infty, 0 \rangle \\ x \in \langle -\infty, -4 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{array}\right] \Rightarrow \underline{x \in \langle -\infty, -4 \rangle}.$$

Konačno rješenje je unija rješenja prvog i drugog slučaja.

$$x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 0, 4 \rangle.$$

Vježba 253

Riješite nejednadžbu $x \cdot |x| - 2 \cdot x < 0.$

Rezultat: $x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 0, 2 \rangle.$

Zadatak 254 (Matko5, gimnazija)

Riješite jednadžbu $(x+5)^4 + (x+3)^4 = 2.$

Rješenje 254

Ponovimo!

$$(a+b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4.$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4.$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \quad , \quad \sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a} \ , \ a > 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$(x+5)^4 + (x+3)^4 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ t = x+4 \end{bmatrix} \Rightarrow (t+1)^4 + (t-1)^4 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^4 + 4 \cdot t^3 + 6 \cdot t^2 + 4 \cdot t + 1 + t^4 - 4 \cdot t^3 + 6 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^4 + 4 \cdot t^3 + 6 \cdot t^2 + 4 \cdot t + 1 + t^4 - 4 \cdot t^3 + 6 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^4 + 6 \cdot t^2 + 1 + t^4 + 6 \cdot t^2 + 1 = 2 \Rightarrow 2 \cdot t^4 + 12 \cdot t^2 + 2 = 2 \Rightarrow 2 \cdot t^4 + 12 \cdot t^2 + 2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot t^4 + 12 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot t^4 + 12 \cdot t^2 = 0 \ / : 2 \Rightarrow t^4 + 6 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow t^2 \cdot \left(t^2 + 6\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} t^2 = 0 \\ t^2 + 6 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

www.halapa.com

Prvi slučaj

$$t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 0 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = 0 \\ t_2 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo x_1 i x_2.

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x + 4 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = -4 \\ x_2 = -4 \end{matrix}\right\}.$$

Drugi slučaj

$$t^2 + 6 = 0 \Rightarrow t^2 = -6 \Rightarrow t^2 = -6 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow t_{3,4} = \pm\sqrt{-6} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_3 = i \cdot \sqrt{6} \\ t_4 = -i \cdot \sqrt{6} \end{matrix}\right\}.$$

Računamo x_3 i x_4.

- $\left.\begin{matrix} t = i \cdot \sqrt{6} \\ x + 4 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 4 = i \cdot \sqrt{6} \Rightarrow x_3 = -4 + i \cdot \sqrt{6}$
- $\left.\begin{matrix} t = -i \cdot \sqrt{6} \\ x + 4 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 4 = -i \cdot \sqrt{6} \Rightarrow x_4 = -4 - i \cdot \sqrt{6}.$

Vježba 254

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 255 (Matko5, gimnazija)

Riješite jednadžbu $5\cdot x^2+5\cdot y^2+8\cdot x\cdot y+2\cdot y-2\cdot x+2=0.$

Rješenje 255

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2=0 \Leftrightarrow a=0.$$

$$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo jednadžbu.

$$5\cdot x^2+5\cdot y^2+8\cdot x\cdot y+2\cdot y-2\cdot x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^2+8\cdot x\cdot y+4\cdot y^2+x^2-2\cdot x+1+y^2+2\cdot y+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(4\cdot x^2+8\cdot x\cdot y+4\cdot y^2\right)+\left(x^2-2\cdot x+1\right)+\left(y^2+2\cdot y+1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\right)+(x-1)^2+(y+1)^2=0 \Rightarrow 4\cdot(x+y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=0 \\ x-1=0 \\ y+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,\ y)=(1,-1).$$

www.halapa.com

Vježba 255

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 256 (Matko5, gimnazija)

Riješite jednadžbu $(6\cdot x+5)^2\cdot(3\cdot x+2)\cdot(x+1)=35.$

Rješenje 256

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad i=\sqrt{-1} \quad , \quad \sqrt{-a}=i\cdot\sqrt{a} \ , \ a>0.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

$$(6\cdot x+5)^2\cdot(3\cdot x+2)\cdot(x+1)=35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(36\cdot x^2+60\cdot x+25\right)\cdot\left(3\cdot x^2+3\cdot x+2\cdot x+2\right)=35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(36\cdot x^2+60\cdot x+25\right)\cdot\left(3\cdot x^2+5\cdot x+2\right)=35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(36\cdot x^2+60\cdot x+24+1\right)\cdot\left(3\cdot x^2+5\cdot x+2\right)=35 \Rightarrow \quad \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\frac{5}{3} \\ t_2=-\frac{7}{4}\end{matrix}\right\}.$$

Prvi slučaj

$$\left.\begin{matrix} 3\cdot x^2+5\cdot x+2=t \\ t=\frac{5}{3}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot x^2+5\cdot x+2=\frac{5}{3} \Rightarrow 3\cdot x^2+5\cdot x+2=\frac{5}{3} \;/\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot x^2+15\cdot x+6=5 \Rightarrow 9\cdot x^2+15\cdot x+6-5=0 \Rightarrow 9\cdot x^2+15\cdot x+1=0 \Rightarrow \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{-5+\sqrt{21}}{6} \\ x_2=\frac{-5-\sqrt{21}}{6}\end{matrix}\right\}.$$

Drugi slučaj

$$\left.\begin{matrix} 3\cdot x^2+5\cdot x+2=t \\ t=-\frac{7}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot x^2+5\cdot x+2=-\frac{7}{4} \Rightarrow 3\cdot x^2+5\cdot x+2=-\frac{7}{4} \;/\cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot x^2+20\cdot x+8=-7 \Rightarrow 12\cdot x^2+20\cdot x+8+7=0 \Rightarrow 12\cdot x^2+20\cdot x+15=0 \Rightarrow \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=\frac{-5+2\cdot\sqrt{5}\cdot i}{6} \\ x_4=\frac{-5-2\cdot\sqrt{5}\cdot i}{6}\end{matrix}\right\}.$$

www.halapa.com

Vježba 256

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 257 (Mario, gimnazija)

Za koju vrijednost realnog parametra m jednadžbe $2\cdot x^2-(3\cdot m+2)\cdot x+12=0$, $4\cdot x^2-(9\cdot m-2)\cdot x+36=0$ imaju zajednički korijen?

Rješenje 257

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x^2-(3\cdot m+2)\cdot x+12=0 \\ 4\cdot x^2-(9\cdot m-2)\cdot x+36=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x^2-3\cdot m\cdot x-2\cdot x+12=0 \\ 4\cdot x^2-9\cdot m\cdot x+2\cdot x+36=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3\cdot m\cdot x=-2\cdot x^2+2\cdot x-12 \\ -9\cdot m\cdot x=-4\cdot x^2-2\cdot x-36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3\cdot m\cdot x=-2\cdot x^2+2\cdot x-12 \;/\cdot\left(-\frac{1}{3\cdot x}\right) \\ -9\cdot m\cdot x=-4\cdot x^2-2\cdot x-36 \;/\cdot\left(-\frac{1}{9\cdot x}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m=\frac{2\cdot x^2-2\cdot x+12}{3\cdot x} \\ m=\frac{4\cdot x^2+2\cdot x+36}{9\cdot x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\cdot x^2-2\cdot x+12}{3\cdot x}=\frac{4\cdot x^2+2\cdot x+36}{9\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot x^2-2\cdot x+12}{3\cdot x}=\frac{4\cdot x^2+2\cdot x+36}{9\cdot x} \;/\cdot 9\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot x^2-6\cdot x+36=4\cdot x^2+2\cdot x+36 \Rightarrow 6\cdot x^2-6\cdot x+36=4\cdot x^2+2\cdot x+36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot x^2-6\cdot x=4\cdot x^2+2\cdot x \Rightarrow 6\cdot x^2-6\cdot x-4\cdot x^2-2\cdot x=0 \Rightarrow 2\cdot x^2-8\cdot x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2-8\cdot x=0 \;/:2 \Rightarrow x^2-4\cdot x=0 \Rightarrow x\cdot(x-4)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \text{ nije rješenje nijedne jednadžbe} \\ x=4 \end{array}\right\} \Rightarrow x=4.$$

www.halapa.com

Računamo m.

$$\left.\begin{array}{l} x=4 \\ m=\frac{2\cdot x^2-2\cdot x+12}{3\cdot x} \end{array}\right\} \Rightarrow m=\frac{2\cdot 4^2-2\cdot 4+12}{3\cdot 4} \Rightarrow m=\frac{2\cdot 16-8+12}{12} \Rightarrow m=\frac{32-8+12}{12}=3.$$

Ili

$$\left.\begin{array}{l} x=4 \\ m=\frac{4\cdot x^2+2\cdot x+36}{9\cdot x} \end{array}\right\} \Rightarrow m=\frac{4\cdot 4^2+2\cdot 4+36}{9\cdot 4} \Rightarrow m=\frac{4\cdot 16+8+36}{36} \Rightarrow m=\frac{64+8+36}{36}=3.$$

Vježba 257

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 258 (Patrik, gimnazija)

Korijeni kvadratne jednadžbe $x^2-\frac{15}{4}\cdot x+a^3=0$ zadovoljavaju uvjet $x_2=x_1^2$. Nađite najveći a za koji to vrijedi.

Rješenje 258

Ponovimo!

$$\frac{n}{1}=n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -b \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Pomoću Vièteovih formula dobije se:

$$x^2 - \frac{15}{4} \cdot x + a^3 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - \frac{15}{4} \cdot x + a^3 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -\frac{15}{4} \ , \ c = a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = -\left(-\frac{15}{4}\right) \\ x_1 \cdot x_2 = a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \\ x_1 \cdot x_2 = a^3 \end{matrix}\right\}.$$

Iz uvjeta $x_2 = x_1^2$ možemo izračunati x_1 i x_2.

$$\left.\begin{matrix} x_2 = x_1^2 \\ x_1 \cdot x_2 = a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_1^2 = a^3 \Rightarrow x_1^3 = a^3 \Rightarrow x_1^3 = a^3 \ /\sqrt[3]{\ } \Rightarrow x_1 = a.$$

Tada je $x_2 = a^2$.
Konačno dobijemo:

$$x_1 + x_2 = \frac{15}{4} \Rightarrow a + a^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow a + a^2 - \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow a^2 + a - \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow a^2 + a - \frac{15}{4} = 0 \ / \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a - 15 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a - 15 = 0 \\ a = 4 \ , \ b = 4 \ , \ c = -15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 4 \ , \ b = 4 \ , \ c = -15 \\ a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-15)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{8} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{8} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{-4\pm 16}{8} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=\frac{-4-16}{8} \\ a_2=\frac{-4+16}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=\frac{-20}{8} \\ a_2=\frac{12}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=\frac{-20}{8} \\ a_2=\frac{12}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=-\frac{5}{2} \\ a_2=\frac{3}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Rješenje je

$$a=\frac{3}{2}.$$

Vježba 258

Korijeni kvadratne jednadžbe $x^2-\frac{15}{4}\cdot x+a^3=0$ zadovoljavaju uvjet $x_2=x_1^2$. Nađite najmanji a za koji to vrijedi.

Rezultat: $a=-\frac{5}{2}.$

Zadatak 259 (Alan Ford, maturant)

Nađite jednadžbu čiji su korijeni $x_1=\frac{1}{10-\sqrt{72}}$, $x_2=\frac{1}{10+6\cdot\sqrt{2}}$.

Rješenje 259

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

www.halapa.com

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}, \quad n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Ako vrijedi $x_1+x_2=m$, $x_1\cdot x_2=n$, onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2-m\cdot x+n=0.$$

Preoblikujemo x_1.

$$x_1=\frac{1}{10-\sqrt{72}} \Rightarrow x_1=\frac{1}{10-\sqrt{36\cdot 2}} \Rightarrow x_1=\frac{1}{10-\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow x_1=\frac{1}{10-6\cdot\sqrt{2}}.$$

Računamo:

- $$x_1+x_2=\frac{1}{10-6\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{10+6\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{10+6\cdot\sqrt{2}+10-6\cdot\sqrt{2}}{\left(10-6\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(10+6\cdot\sqrt{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{10+6\cdot\sqrt{2}+10-6\cdot\sqrt{2}}{10^2-\left(6\cdot\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{20}{100-6^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{20}{100-36\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{20}{100-72} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{20}{28} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{20}{28} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{5}{7}.$$

- $$x_1\cdot x_2=\frac{1}{10-6\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{10+6\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{1}{28}.$$

Jednadžba glasi:

$$x^2-\left(x_1+x_2\right)\cdot x+x_1\cdot x_2=0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{7}\cdot x+\frac{1}{28}=0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{7}\cdot x+\frac{1}{28}=0 \ /\cdot 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 28 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 1 = 0.$$

Vježba 259

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 260 (Branimir, maturant)

Odredite k tako da jednadžbe $x^2 - 3 \cdot x + k + 1 = 0, \ x^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot k + 1 = 0$ imaju točno jedno zajedničko rješenje.

Rješenje 260

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a - c = b - d \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Pretpostavimo da je n zajedničko rješenje. Onda slijedi:

$$\left.\begin{matrix} n^2 - 3 \cdot n + k + 1 = 0 \\ n^2 - 4 \cdot n + 2 \cdot k + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow n^2 - 3 \cdot n + k + 1 - \left(n^2 - 4 \cdot n + 2 \cdot k + 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 3 \cdot n + k + 1 - n^2 + 4 \cdot n - 2 \cdot k - 1 = 0 \Rightarrow n^2 - 3 \cdot n + k + 1 - n^2 + 4 \cdot n - 2 \cdot k - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot n + k + 4 \cdot n - 2 \cdot k = 0 \Rightarrow n - k = 0 \Rightarrow n = k.$$

Računamo k.

$$\left.\begin{matrix} n = k \\ n^2 - 3 \cdot n + k + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow k^2 - 2 \cdot k + k + 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 2 \cdot k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 1.$$

www.halapa.com

Vježba 260

Odmor!

Rezultat: …